中国科学 A 辑: 数学 2008 年 第 38 卷 第 3 期: 249～259
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

Lie 余模和 Lie 双代数的构造

张良云

南京农业大学理学院, 南京 210095
E-mail: zlyun@njau.edu.cn

收稿日期: 2006-10-30; 接受日期: 2007-11-19
国家自然科学基金 (批准号: 10571153) 资助项目

摘要 首先给出 Lie 余模的直和分解, 然后根据 Lie 余模理论由 Lie 余代数构造某些 (三角)Lie 双代数.

关键词 Lie 余代数 Lie 余模 Lie 双代数 三角 Lie 双代数

MSC(2000) 主题分类 **16W30**

1 引言与准备

在非结合代数中, Lie 代数的研究非常成熟. 1980 年, Michaelis 引入了 Lie 代数的概念, 即 Lie 余代数, 并给出对偶 Poincaré-Birkhoff-Witt 定理 (见文献 [1]).

1986 年, Drinfel'd 在国际数学家大会上引入了 Lie 双代数的概念 (见文献 [2]).

1994 年, 根据 Lie 模理论, Michaelis 由 Lie 代数构造了 Lie 双代数. 在 Lie 双代数的构造中, Lie 模理论起着非常重要作用 (见文献 [3] 中的定理 3.2), 而且由 Virasoro 代数和 Witt 代数可以构造 Lie 双代数.

2006 年, 文献 [4, 5] 在广义 Virasoro 型代数和广义 Witt 型代数上分别构造了 Lie 双代数. 文献 [6] 引入了 (H,R)-Lie 余代数和 (H,R)-Lie 双代数的概念, 分别推广了 Lie 余代数和 Lie 双代数, 这里 (H,R) 表示三角 Hopf 代数.

本文将给出 Lie 余模的直和分解, 然后根据 Lie 余模理论由 Lie 余代数构造某些 (三角)Lie 双代数. 因此, 推广了文献 [1] 中的一些结果, 给出了文献 [3] 中的对偶结论.

本文首先回忆一些概念, 并证明局部有限函子 Loc: ${}^{\Gamma}\mathbf{M} \to {}^{\Gamma}\mathbf{M}_{l.f.}$ 是包含函子 ${}^{\Gamma}\mathbf{M}_{l.f.} \to {}^{\Gamma}\mathbf{M}$ 的一个右伴随 (见命题 1). 其次, 给出 Lie 余模的直和分解, 即, 如果 W 是一个左 Γ-Lie 余模, 则存在一个直和分解: $W\otimes W = W_+ \oplus W_-$(见命题 2). 如果 Γ 是一个具有 Lie 余单位 ε 的 Lie 余代数, 则对任意左 Γ-Lie 余模 M, 存在直和分解

$$M = M_+ \oplus M_-$$

当且仅当 $\Phi^2 = I$(见定理 1). 最后由 Lie 余代数构造 Lie 双代数, 而且由 Euclid 空间 E^3 和无限维向量空间 Γ 可以构造某些 (余边缘, 三角)Lie 双代数 (见例 3–5).

本文所讨论的对象均在域 k 上考虑, 有关代数, 余代数与 Hopf 代数的记号与符号参见文献 [5].

下面回忆本文用到的有关概念:

• 一个 Lie 代数是由一个向量空间 L 和称之为括积的映射 $[\cdot,\cdot]: L\otimes L \to L, x\otimes y \mapsto [x,y]$ 组成, 并满足

(L1) $[x,x]=0$, 对任意 $x\in L$,

(L2) $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$, 对任意 $x,y,z\in L$.

条件 (L1) 是反交换的强形式, 条件 (L2) 是 Jacobi 恒等式.

例如, 如果 A 是一个未必有单位元的结合代数, 则在 A 上有一个 Lie 代数结构

$$[a,b]=ab-ba.$$

• 设 L 是一个 Lie 代数, V 是一个线性空间, 如果存在一个双线性映射 $\varphi: L\otimes V \to V, x\otimes v\mapsto x\cdot v$ 满足

(LM) $[x,y]\cdot v = x\cdot(y\cdot v) - y\cdot(x\cdot v), x,y\in L, v\in V$, 则称 V 是一个左 L-Lie 模.

如果域 k 的特征不等于 2, 则条件 (L1) 和 (L2) 可以被如下的条件分别替换

(L1)′ $\mathrm{Ker}(I-\tau)\subseteq \mathrm{Ker}[\cdot,\cdot]$, 其中 $I: V\to V$ 表示恒等映射, τ 表示扭曲映射, 即 $\tau: L\otimes L\to L\otimes L, x\otimes y\mapsto y\otimes x$.

(L2)′ $[\cdot,\cdot](I\otimes[\cdot,\cdot])(I+\xi+\xi^2)=0$, 这里 $\xi,\xi^2: L\otimes L\otimes L\to L\otimes L\otimes L, \xi: x\otimes y\otimes z\mapsto y\otimes z\otimes x, \xi^2: x\otimes y\otimes z\mapsto z\otimes x\otimes y$.

以后, 我们总是假定域 k 的特征不等于 2.

• 文献 [1] 中的 Lie 余代数是由一个向量空间 Γ 和一个线性映射 $\Delta: \Gamma\to\Gamma\otimes\Gamma$ 组成, 并满足

(Γ1) $\mathrm{Im}\Delta\subseteq \mathrm{Im}(I-\tau)$,

(Γ2) $(I+\xi+\xi^2)(I\otimes\Delta)\Delta=0$.

下面总是使用这样的记号 $\Delta(t)=\Sigma t_i\otimes t_j, t\in\Gamma$.

条件 (Γ1) 可以被如下的条件替换:

(Γ1)′ $\Delta=-\tau\Delta$.

例如, 如果 C 是一个未必有余单位的余代数, 即, 存在一个线性映射 $\Delta_C: C\to C\otimes C$, 使得 $(\Delta_C\otimes I)\Delta_C=(I\otimes\Delta_C)\Delta_C$, 则在 C 上可以得到一个结合的 Lie 余代数 $Ł^c(C)$:

作为向量空间 $Ł^c(C)=C$, 它的 Lie 余乘法定义为 $\Delta_{Ł^c(C)}: Ł^c(C)\to Ł^c(C)\otimes Ł^c(C), c\mapsto \Sigma[c_1\otimes c_2-c_2\otimes c_1]$, 其中 $\Delta_C(c)=\Sigma c_1\otimes c_2$.

定义 1 设 Γ 是一个 Lie 余代数, M 是一个线性空间, 如果存在一个线性映射 $\rho_M: M\to\Gamma\otimes M, m\mapsto\Sigma m_{(-1)}\otimes m_{(0)}$, 使得下面条件满足:

(LCM) $(\Delta\otimes I)\rho_M=(I\otimes\rho_M)\rho_M-(\tau\otimes I)(I\otimes\rho_M)\rho_M$, 即, 对任意 $m\in M$,

$$\Sigma m_{(-1)i}\otimes m_{(-1)j}\otimes m_{(0)}=\Sigma[m_{(-1)}\otimes m_{(0)(-1)}\otimes m_{(0)(0)}-m_{(0)(-1)}\otimes m_{(-1)}\otimes m_{(0)(0)}],$$

则称 M 是文献 [7] 中的左 Γ-Lie 余模.

例 1 设 C 是一个余代数, 具有余乘法 Δ_C 和余单位 ε_C, 如果 M 是一个左 C- 余模, 即, 存在一个线性映射 $\rho_M : M \to C \otimes M$, 使得

$$(I \otimes \rho_M)\rho_M = (\Delta_C \otimes I)\rho_M, \quad (\varepsilon_C \otimes I)\rho_M = I,$$

则通过 ρ_M, M 是一个左 $\text{Ł}^c(C)$-Lie 余模, 其中 $\text{Ł}^c(C)$ 是诱导的结合 Lie 余代数.

证明 对任意 $m \in M$, 有

$$\begin{aligned}\Sigma m_{(-1)i} \otimes m_{(-1)j} \otimes m_{(0)} &= \Sigma[m_{(-1)1} \otimes m_{(-1)2} - m_{(-1)2} \otimes m_{(-1)1}] \otimes m_{(0)} \\ &= \Sigma[m_{(-1)1} \otimes m_{(-1)2} \otimes m_{(0)} - m_{(-1)2} \otimes m_{(-1)1} \otimes m_{(0)}] \\ &= \Sigma[m_{(-1)} \otimes m_{(0)(-1)} \otimes m_{(0)(0)} - m_{(0)(-1)} \otimes m_{(-1)} \otimes m_{(0)(0)}] \\ &\quad (M \text{是左 } C\text{- 余模}),\end{aligned}$$

因此, 由定义 1 知 M 是一个左 $\text{Ł}^c(C)$-Lie 余模. 证毕.

设 M 是一个左 Γ-Lie 余模, 如果对任意 $m \in M$, 存在 M 的一个有限维子 Lie 余模 N, 使得 $m \in N$, 则称 M 是一个局部有限 Lie 余模.

设 M 是一个左 Γ-Lie 余模, 用 $\mathrm{Loc}(M)$ 表示 M 的有限维子 Lie 余模之和 ΣM_α, 则 $\mathrm{Loc}(M)$ 是 M 的一个最大有限维子 Lie 余模.

设 $f : M_1 \to M_2$ 是一个左 Γ-Lie 余模映射, 即 $\rho_{M_2} f = (I \otimes f)\rho_{M_1}$, 则 $f(\mathrm{Loc}(M_1)) \subseteq \mathrm{Loc}(M_2)$. 设 $\mathrm{Loc}(f) = f|_{\mathrm{Loc}(M_1)}$, 则 $\mathrm{Loc}(f) : \mathrm{Loc}(M_1) \to \mathrm{Loc}(M_2)$.

用 ${}^\Gamma M$ 表示左 Γ-Lie 余模范畴, 即, 它的对象是左 Γ-Lie 余模, 态射是左 Γ-Lie 余模映射; 用 ${}^\Gamma M_{l.f.}$ 表示局部有限左 Γ-Lie 余模范畴, 即, 它的对象是局部有限左 Γ-Lie 余模, 态射是左 Γ-Lie 余模映射. 因此, 有范畴 ${}^\Gamma\mathbf{M}$ 到范畴 ${}^\Gamma\mathbf{M}_{l.f.}$ 的一个函子, 表示为 Loc, 并称之为局部有限函子.

命题 1 设 Γ 是一个 Lie 余代数, 则局部有限函子 Loc: ${}^\Gamma\mathbf{M} \to {}^\Gamma \mathbf{M}_{l.f.}$ 是包含函子 $\iota : {}^\Gamma \mathbf{M}_{l.f.} \to {}^\Gamma \mathbf{M}$ 的一个右伴随, 即, 存在如下的双射:

$$\mathrm{Hom}_{{}^\Gamma\mathbf{M}}(\iota(P), M) \simeq \mathrm{Hom}_{{}^\Gamma\mathbf{M}_{l.f.}}(P, \mathrm{Loc}(M)).$$

证明 设

$$F : \mathrm{Hom}_{{}^\Gamma\mathbf{M}}(\iota(P), M) \to \mathrm{Hom}_{{}^\Gamma\mathbf{M}_{l.f.}}(P, \mathrm{Loc}(M)), \quad f \mapsto F(f) = \mathrm{Loc}(f),$$

$$G : \mathrm{Hom}_{{}^\Gamma\mathbf{M}_{l.f.}}(P, \mathrm{Loc}(M)) \to \mathrm{Hom}_{{}^\Gamma\mathbf{M}}(\iota(P), M)), \quad f \mapsto G(f) = if,$$

这里 $i : \mathrm{Loc}(M) \hookrightarrow M$ 表示自然嵌入映射. 不难证明: $FG = id_{\mathrm{Hom}_{{}^\Gamma\mathbf{M}_{l.f.}}(P,\mathrm{Loc}(M))}$, $GF = id_{\mathrm{Hom}_{{}^\Gamma\mathbf{M}}(\iota(P),M)}$, 其中 $id_{\mathrm{Hom}_{{}^\Gamma\mathbf{M}}(\iota(P),M)} : \mathrm{Hom}_{{}^\Gamma\mathbf{M}}(\iota(P), M) \to \mathrm{Hom}_{{}^\Gamma\mathbf{M}}(\iota(P), M)$ 表示恒等映射. 证毕.

2 Lie 余模及其直和分解

引理 1 设 V 和 W 均为左 Γ-Lie 余模, 如果定义

$$\rho : V \otimes W \to \Gamma \otimes V \otimes W, \quad v \otimes w \mapsto \Sigma[v_{(-1)} \otimes v_{(0)} \otimes w + w_{(-1)} \otimes v \otimes w_{(0)}],$$

则 $V \otimes W$ 是一个左 Γ-Lie 余模, 这里 $\rho_V(v) = \Sigma v_{(-1)} \otimes v_{(0)} \in \Gamma \otimes V$, $\rho_W(w) = \Sigma w_{(-1)} \otimes w_{(0)} \in \Gamma \otimes W$ 分别是 V 和 W 的 Lie 余模结构映射.

证明 记 $\rho(v\otimes w)=\Sigma(v\otimes w)_{(-1)}\otimes(v\otimes w)_{(0)}$, 则

$$
\begin{aligned}
&\Sigma[(v\otimes w)_{(-1)}\otimes(v\otimes w)_{(0)(-1)}\otimes(v\otimes w)_{(0)(0)}-(v\otimes w)_{(0)(-1)}\otimes(v\otimes w)_{(-1)}\otimes(v\otimes w)_{(0)(0)}]\\
&=\Sigma[v_{(-1)}\otimes(v_{(0)}\otimes w)_{(-1)}\otimes(v_{(0)}\otimes w)_{(0)}-(v_{(0)}\otimes w)_{(-1)}\otimes v_{(-1)}\otimes(v_{(0)}\otimes w)_{(0)}\\
&\quad+w_{(-1)}\otimes(v\otimes w_{(0)})_{(-1)}\otimes(v\otimes w_{(0)})_{(0)}-(v\otimes w_{(0)})_{(-1)}\otimes w_{(-1)}\otimes(v\otimes w_{(0)})_{(0)}]\\
&=\Sigma[v_{(-1)}\otimes v_{(0)(-1)}\otimes v_{(0)(0)}\otimes w+v_{(-1)}\otimes w_{(-1)}\otimes v_{(0)}\otimes w_{(0)}-v_{(0)(-1)}\otimes v_{(-1)}\otimes v_{(0)(0)}\\
&\quad\otimes w-w_{(-1)}\otimes v_{(-1)}\otimes v_{(0)}\otimes w_{(0)}+w_{(-1)}\otimes v_{(-1)}\otimes v_{(0)}\otimes w_{(0)}+w_{(-1)}\otimes w_{(0)(-1)}\otimes v\\
&\quad\otimes w_{(0)(0)}-v_{(-1)}\otimes w_{(-1)}\otimes v_{(0)}\otimes w_{(0)}-w_{(0)(-1)}\otimes w_{(-1)}\otimes v\otimes w_{(0)(0)}]\\
&=\Sigma[v_{(-1)}\otimes v_{(0)(-1)}\otimes v_{(0)(0)}\otimes w-v_{(0)(-1)}\otimes v_{(-1)}\otimes v_{(0)(0)}\otimes w+w_{(-1)}\otimes w_{(0)(-1)}\otimes v\\
&\quad\quad\otimes w_{(0)(0)}-w_{(0)(-1)}\otimes w_{(-1)}\otimes v\otimes w_{(0)(0))}]\\
&=\Sigma[v_{(-1)i}\otimes v_{(-1)j}\otimes v_{(0)}\otimes w+w_{(-1)i}\otimes w_{(-1)j}\otimes v\otimes w_{(0)}]\\
&=\Sigma(v\otimes w)_{(-1)i}\otimes(v\otimes w)_{(-1)j}\otimes(v\otimes w)_{(0)},
\end{aligned}
$$

故 $V\otimes W$ 是左 Γ-Lie 余模. 证毕.

设 Γ 是一个 Lie 余代数, 则通过余伴随余作用 $\Delta:\Gamma\to\Gamma\otimes\Gamma$, Γ 是一个左 Γ-Lie 余模, 因此, 由引理 1, 有

推论 1 设 Γ 是一个 Lie 余代数, 则通过如下的余伴随余作用, $\Gamma\otimes\Gamma$ 是左 Γ-Lie 余模

$$\rho:\Gamma\otimes\Gamma\to\Gamma\otimes\Gamma\otimes\Gamma,\quad x\otimes y\mapsto\Sigma[x_i\otimes x_j\otimes y+y_i\otimes x\otimes y_j].$$

如果 W 是左 Γ-Lie 余模, 则由引理 1, $W\otimes W$ 也是左 Γ-Lie 余模, 结构映射为

$$\rho:W\otimes W\to\Gamma\otimes W\otimes W,\quad \rho(v\otimes w)=\Sigma[v_{(-1)}\otimes v_{(0)}\otimes w+w_{(-1)}\otimes v\otimes w_{(0)}].$$

设 $\tau:W\otimes W\to W\otimes W$ 是一个扭曲映射, 则不难证明 τ 不仅是 Lie 余模的一个同构而且也是对合的 $(\tau^2=I)$.

设 $W_+=\{s\in W\otimes W|\tau(s)=s\}, W_-=\{s\in W\otimes W|\tau(s)=-s\}$, 则存在左 Γ-Lie 余模的直和分解

$$W\otimes W=W_+\oplus W_-.$$

事实上, 由于 τ 是左 Γ-Lie 余模映射, 所以 $\rho(W_+)\subseteq\Gamma\otimes W_+, \rho(W_-)\subseteq\Gamma\otimes W_-$. 显然, W_+ 和 W_- 均是左 Γ-Lie 余模. 因此, 有

命题 2 设 W 是一个左 Γ-Lie 余模, 则存在 Lie 余模的直和分解

$$W\otimes W=W_+\oplus W_-.$$

定义 2 设 Γ 是一个具有 Lie 余乘法 Δ 的 Lie 余代数, 如果存在一个非零线性映射 $\varepsilon:\Gamma\to k$, 使得 $(\varepsilon\otimes I)\Delta=0$, 则称 ε 为 Γ 的一个 Lie 余单位.

注 1 设 Γ 是一个 Lie 余代数, 具有 Lie 余单位 ε, 则由 $(\Gamma1)'$ 知 $(I\otimes\varepsilon)\Delta=0$, 因此, 对任意 $f\in\Gamma^*, f*\varepsilon=0=\varepsilon*f$, 即, ε 是 Γ^* 的零化子, 这里 Γ^* 表示 Γ 的对偶向量空间.

例 2 (1) 设 C 是一个余代数, 具有余乘法 Δ_C, 则这个结合的 Lie 余代数 $\text{Ł}^c(C)$ 有一个 Lie 余单位 ε_C, 其中 ε_C 是 C 的余单位, 即 $(\varepsilon_C\otimes I)\Delta_C=I=(I\otimes\varepsilon_C)\Delta_C$.

(2) 设 $H=U(L)$ 是 Lie 代数 L 的泛包络代数, 则 H 是一个 Hopf 代数, 具有如下结构:

$$
\begin{aligned}
&S_H(x)=-x,\\
&\Delta_H(x)=1\otimes x+x\otimes 1, \varepsilon_H(x)=0.
\end{aligned}
$$

因此, 诱导的结合 Lie 余代数 $\mathrm{L}^h(H)$ 的结构是平凡的, 即对任意 $x \in \mathrm{L}^h(H), \Delta(x)=0$, 故对任意非零线性映射 $\varepsilon: H \rightarrow k, \varepsilon$ 是 $\mathrm{L}^h(H)$ 的一个 Lie 余单位.

但也存在没有 Lie 余单位的 Lie 余代数.

(3) 设 $\mathbb{R}$ 表示一个实数域, 用 $\mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_3$ 表示 3 维 Euclid 空间 E^3, 其中

$$e_1=(1,0,0), \quad e_2=(0,1,0), \quad e_3=(0,0,1).$$

设 $(E^3)^*$ 表示 E^3 的对偶空间, 定义

$$\begin{aligned}
&\Delta:(E^3)^* \rightarrow (E^3)^* \otimes (E^3)^*, \\
&e^1 \mapsto e^2 \otimes e^3-e^3 \otimes e^2, \quad e^2 \mapsto e^3 \otimes e^1-e^1 \otimes e^3, \quad e^3 \mapsto e^1 \otimes e^2-e^2 \otimes e^1,
\end{aligned}$$

其中 $\{e^1, e^2, e^3\}$ 表示对偶基, 则由文献 [1] 知 $(E^3)^*$ 是一个 Lie 余代数. 但 $(E^3)^*$ 没有 Lie 余单位.

如果 ε 是 $(E^3)^*$ 的 Lie 余单位, 则对元素 e^1,

$$0=\Sigma \varepsilon((e^1)_i)(e^1)_j=\varepsilon(e^2) e^3-\varepsilon(e^3) e^2.$$

于是 $\varepsilon(e^2)=\varepsilon(e^3)=0$. 类似地, 可以证明 $\varepsilon(e^1)=\varepsilon(e^3)=0$, 故 $\varepsilon=0$, 矛盾.

设 Γ 是一个具有 Lie 余单位 ε 的 Lie 余代数, M 是一个具有 Lie 余结构 ρ_M 的左 Γ-Lie 余模.

定义

$$\Phi: M \rightarrow M, \quad m \mapsto \Sigma \varepsilon(m_{(-1)}) m_{(0)},$$

即 $\Phi(m)=(\varepsilon \otimes I) \rho_M(m)$, 以后, 用 $(\varepsilon * I)(m)$ 表示 $\Sigma \varepsilon(m_{(-1)}) m_{(0)}$, 因此, $\Phi(m)=(\varepsilon * I)(m)$.

定理 1 设 Γ 为具有 Lie 余单位 ε 的 Lie 余代数, 则对任意左 Γ-Lie 余模 M, 存在直和分解

$$M=M_{+} \oplus M_{-}$$

当且仅当 $\Phi^2=I$, 即 $\varepsilon *(\varepsilon * I)=I$, 其中 $M_{+}=\{m \in M \mid \Phi(m)=m\}$, $M_{-}=\{m \in M \mid \Phi(m)=-m\}$.

证明 (1) Φ 是左 Γ-Lie 余模映射.

事实上, 对任意 $m \in M$,

$$\begin{aligned}
\rho_M \Phi(m) & =\Sigma \varepsilon(m_{(-1)}) \rho_M(m_{(0)})=\Sigma \varepsilon(m_{(-1)}) m_{(0)(-1)} \otimes m_{(0)(0)} \\
& =\Sigma[\varepsilon(m_{(-1) i}) m_{(-1) j} \otimes m_{(0)}+\varepsilon(m_{(0)(-1)}) m_{(-1)} \otimes m_{(0)(0))}] \\
& =\Sigma \varepsilon(m_{(0)(-1)}) m_{(-1)} \otimes m_{(0)(0)} \quad (\varepsilon \text{ 是 Lie 余单位}) \\
& =(I \otimes \Phi) \rho_M(m).
\end{aligned}$$

(2) M_{+} 和 M_{-} 均为 M 的左 Γ-Lie 子余模.

由 (1), 它的证明是显然的.

(3) $M=M_{+} \oplus M_{-}$ 当且仅当 $\Phi^2=I$.

事实上, 如果 $\Phi^2=I$, 则对任意 $x \in M$, 令 $y=\frac{1}{2}(x+\Phi(x)), z=\frac{1}{2}(x-\Phi(x))$, 可以证明 $x=y+z$, 并且 $y \in M_{+}, z \in M_{-}$, 故 $M=M_{+} \oplus M_{-}$.

反之, 证明是显然的. 证毕.

设 $(E^3)^*$ 表示例 2(3) 中的 Lie 余代数, $H=U(E^3)$ 是一个泛包络代数. 定义

$$\rho:(E^3)^*\to Ł^h(H)\otimes(E^3)^*,\quad e^i\mapsto e_i\otimes e^i,\quad i=1,2,3,$$

这里 $Ł^h(H)$ 表示例 2 中的结合 Lie 余代数, 则不难证明 $(E^3)^*$ 是左 $Ł^h(H)$-Lie 余模, 因此 $(E^3)^*$ 是文献 [6] 中的一个左 $Ł^h(H)$- 余模 Lie 余代数.

设 $\varepsilon:H=U(E^3)\to k, e_1\mapsto 1, e_2\mapsto -1, e_3\mapsto -1$, 则根据例 2, ε 是 $Ł^h(H)$ 的 Lie 余单位, 并且 $\Phi^2(e^i)=e^i, i=1,2,3$, 即 $\Phi^2=I$.

因此有

推论 2 设 $(E^3)^*$ 是对偶 Lie 余代数, $H=U(E^3)$, 令 $\varepsilon:U(E^3)\to k, e_1\mapsto 1, e_2\mapsto -1, e_3\mapsto -1$, 则存在左 $Ł^h(H)$-Lie 余模直和分解

$$(E^3)^*=(E^3)^*_+\oplus(E^3)^*_-,$$

这里 $Ł^h(H)$ 表示结合 Lie 余代数, 但这种分解不是 Lie 余代数的直和分解.

3 Lie 双代数的构造

定义 3 设 $(L,[\cdot,\cdot])$ 是 Lie 代数, (L,Δ) 是 Lie 余代数, 如果对任意 $x,y\in L$,

(LB) $\Delta[x,y]=x\cdot\Delta(y)-y\cdot\Delta(x)$,

则称 $(L,[\cdot,\cdot],\Delta)$ 是 Lie 双代数, 这里作用 "$\cdot$" 按如下定义:

$$x\cdot(a\otimes b)=[x,a]\otimes b+a\otimes[x,b].$$

设 $(L,[\cdot,\cdot],\Delta)$ 是一个 Lie 双代数, 如果存在一个元素 $r\in \mathrm{Im}(I-\tau)\subseteq L\otimes L$, 使得对任意 $x\in L$,

$$\Delta(x)=x\cdot r,$$

则称 $(L,[\cdot,\cdot],\Delta,r)$ 为余边缘 Lie 双代数.

设 $(L,[\cdot,\cdot],\Delta,r)$ 是一个余边缘 Lie 双代数, 如果元素 r 满足如下经典 Yang-Baxter 方程:

$$[r^{12},r^{13}]+[r^{12},r^{23}]+[r^{13},r^{23}]=0,$$

则称 $(L,[\cdot,\cdot],\Delta,r)$ 是文献 [3] 中的一个三角 Lie 双代数. 这里 $r=\Sigma a_i\otimes b_i, [r^{12},r^{13}]=\Sigma[a_i,a_j]\otimes b_i\otimes b_j, [r^{12},r^{23}]=\Sigma a_i\otimes[b_i,a_k]\otimes b_k, [r^{13},r^{23}]=\Sigma a_j\otimes a_k\otimes[b_j,b_k]$.

命题 3 设 (Γ,Δ) 是 Lie 余代数, 如果存在一个非零线性映射 $\eta:\Gamma\otimes\Gamma\to k$, 使得 $\eta=-\eta\tau$, 即, η 是反对称的, 则根据下面映射的合成:

$$[\cdot,\cdot]:\Gamma\otimes\Gamma\xrightarrow{\Delta\otimes I+(\tau\otimes I)(I\otimes\Delta)}\Gamma\otimes\Gamma\otimes\Gamma\xrightarrow{I\otimes\eta}\Gamma,$$

即

$$[\cdot,\cdot]:\Gamma\otimes\Gamma\to\Gamma,\quad x\otimes y\mapsto\Sigma[x_i\eta(x_j,y)+y_i\eta(x,y_j)],$$

有如下结论:

(1) $\mathrm{Ker}(I-\tau)\subseteq\mathrm{Ker}[\cdot,\cdot]$.

(2) $\Delta[x,y]=x\cdot\Delta(y)-y\cdot\Delta(x)$, 其中 $x\cdot\Delta(y)=\Sigma[x,y_i]\otimes y_j+y_i\otimes[x,y_j]$.

证明 (1) 对任意 $r\in\mathrm{Ker}(I-\tau)\subseteq\Gamma\otimes\Gamma$, $(I-\tau)(r)=0$.

记 $r=\Sigma r'\otimes r''$, 则 $\Sigma r'\otimes r''=\Sigma r''\otimes r'$, 因此,

$$\Sigma[r',r'']=\Sigma[r'_i\eta(r'_j,r'')+r''_i\eta(r',r''_j)]$$

$$
\begin{aligned}
&= \Sigma[r_i''\eta(r_j'',r')+r_i''\eta(r',r_j'')]\\
&= \Sigma[-r_i''\eta(r',r_j'')+r_i''\eta(r',r_j'')]\\
&= 0,
\end{aligned}
$$

于是 (1) 成立.

(2) 由推论 1, $\Gamma\otimes\Gamma$ 是一个左 Γ-Lie 余模, 它的结构映射为

$$\rho(x\otimes y)=\Sigma[x_i\otimes x_j\otimes y+y_i\otimes x\otimes y_j],$$

因此

$$
\begin{aligned}
\Delta[x,y] &= \Sigma\Delta[(I\otimes\eta)(x_i\otimes x_j\otimes y+y_i\otimes x\otimes y_j)]\\
&= (I\otimes I\otimes\eta)(\Delta\otimes I)\rho(x\otimes y)\\
&= (I\otimes I\otimes\eta)[(I\otimes\rho)\rho(x\otimes y)-(\tau\otimes I)(I\otimes\rho)\rho(x\otimes y)]\\
&= \Sigma[x_i\otimes x_{ji}\eta(x_{jj},y)+y_i\otimes y_{ji}\eta(x,y_{jj})-x_{ji}\otimes x_i\eta(x_{jj},y)-y_{ji}\otimes y_i\eta(x,y_{jj})]\\
&= \Sigma[-x_i\otimes x_{ji}\eta(y,x_{ij})+y_i\otimes y_{ji}\eta(x,y_{jj})-x_{ii}\otimes x_j\eta(y,x_{jj})+y_{ii}\otimes y_j\eta(x,y_{ij})]\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\Gamma 1',\eta=-\eta\tau)\\
&= \Sigma[\underline{x_i\eta(x_j,y_i)\otimes y_j}+y_{ii}\eta(x,y_{ij})\otimes y_j+\underbrace{y_i\otimes x_i\eta(x_j,y_j)}+y_i\otimes y_{ji}\eta(x,y_{jj})\\
&\quad -\underbrace{y_i\eta(y_j,x_i)\otimes x_j}-x_{ii}\eta(y,x_{ij})\otimes x_j-\underline{x_i\otimes y_i\eta(y_j,x_j)}-x_i\otimes x_{ji}\eta(y,x_{jj})]\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\Gamma 1',\eta=-\eta\tau)\\
&= x\cdot\Delta(y)-y\cdot\Delta(x).
\end{aligned}
$$

证毕.

下面, 给出本文的一个主要结果:

定理 2 设 (Γ,Δ) 是一个 Lie 余代数, 如果存在一个元素 $t\in\Gamma$ 以及两个线性无关元素 $u,v\in\Gamma^*$, 使得对任意 $x\in\Gamma$,

$$
\begin{aligned}
(I\otimes u)\Delta(x)&=u(x)t,\\
(I\otimes v)\Delta(x)&=v(x)t,
\end{aligned}
$$

并让 $\eta=u\otimes v-v\otimes u$, 则由命题 3 所定义的 $[\cdot,\cdot]$, $(\Gamma,\Delta,[\cdot,\cdot])$ 是一个 Lie 双代数.

注意映射 η 满足可积条件: $[\eta^{12},\ \eta^{13}+\eta^{23}]=0$. 该条件出现在文献 [8] 关于 Knizhnik-Zamolodchikov 方程的研究中.

证明 为证明 $(\Gamma,\Delta,[\cdot,\cdot])$ 是一个 Lie 双代数, 根据命题 3, 只要证明 $(\Gamma,[\cdot,\cdot])$ 是一个 Lie 代数.

事实上, 对任意 $x,y\in\Gamma$,

$$
\begin{aligned}
[x,y] &= \Sigma[x_i\eta(x_j,y)+y_i\eta(x,y_j)]\\
&= \Sigma[x_iu(x_j)v(y)-x_iv(x_j)u(y)+y_iu(x)v(y_j)-y_iv(x)u(y_j)]\\
&= 2u(x)v(y)t-2v(x)u(y)t,
\end{aligned}
$$

因此, 对任意 $x,y,z\in\Gamma$,

$$[x,[y,z]]=4(u(x)v(t)u(y)v(z)-v(x)u(t)u(y)v(z)-u(x)v(t)v(y)u(z)+v(x)u(t)v(y)u(z))t,$$

$$[y,[z,x]] = 4(u(y)v(t)u(z)v(x) - v(y)u(t)u(z)v(x) - u(y)v(t)v(z)u(x) + v(y)u(t)v(z)u(x))t,$$
$$[z,[x,y]] = 4(u(z)v(t)u(x)v(y) - v(z)u(t)u(x)v(y) - u(z)v(t)v(x)u(y) + v(z)u(t)v(x)u(y))t.$$

于是 $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$, 故 $(\Gamma, [\cdot,\cdot])$ 是一个 Lie 代数.

另外, 根据定义 3,

$[\eta^{12}, \eta^{13}] = [u,u]\otimes v\otimes v - [u,v]\otimes v\otimes u - [v,u]\otimes u\otimes v + [v,v]\otimes u\otimes u = -[u,v]\otimes v\otimes u - [v,u]\otimes u\otimes v$;

$[\eta^{12}, \eta^{23}] = u\otimes[v,u]\otimes v - u\otimes[v,v]\otimes u - v\otimes[u,u]\otimes v + v\otimes[u,v]\otimes u = u\otimes[v,u]\otimes v + v\otimes[u,v]\otimes u$.

由于 (Γ, Δ) 是一个 Lie 余代数, 所以对偶空间 Γ^* 是一个 Lie 代数, 它的扩积 $[\cdot,\cdot]$ 恰好由 Δ^* 给出.

易证: 对任意 $u, v \in \Gamma^*$, $[u,u] = 0$; 又对任意 $x \in \Gamma$,

$$\langle [u,v], x\rangle = u(t)v(x), \quad \langle [v,u], x\rangle = v(t)u(x).$$

事实上,

$$\begin{aligned}\langle [u,v], x\rangle &= \langle u\otimes v, \Delta(x)\rangle = \Sigma u(x_i)v(x_j)\\ &= u(\Sigma x_i v(x_j)) = u(v(x)t) \quad (I\otimes v)\Delta(x) = v(x)t\\ &= u(t)v(x).\end{aligned}$$

类似地, 可以证明 $\langle [v,u], x\rangle = v(t)u(x)$. 因此, 对任意 $x, y, z \in \Gamma$,

$$\begin{aligned}&\langle [\eta^{12}, \eta^{13}] + [\eta^{12}, \eta^{23}], x\otimes y\otimes z\rangle\\ &= -\langle [u,v], x\rangle v(y)u(z) - \langle [v,u], x\rangle u(y)v(z) + u(x)\langle [v,u], y\rangle v(z)\\ &\quad + v(x)\langle [u,v], y\rangle u(z)\\ &= -u(t)v(x)v(y)u(z) - v(t)u(x)u(y)v(z) + u(x)v(t)u(y)v(z) + v(x)u(t)v(y)u(z)\\ &= 0,\end{aligned}$$

即 $[\eta^{12}, \eta^{13} + \eta^{23}] = 0$. 证毕.

例 3 (1) 设 $(E^3)^*$ 是例 2 中的对偶 Lie 余代数, 具有如下的 Lie 余乘法:

$$\Delta(e^1) = e^2\otimes e^3 - e^3\otimes e^2,$$
$$\Delta(e^2) = e^3\otimes e^1 - e^1\otimes e^3,$$
$$\Delta(e^3) = e^1\otimes e^2 - e^2\otimes e^1.$$

定义如下的映射 $\eta : (E^3)^*\otimes(E^3)^* \to k$:

$$\eta(e^i, e^i) = 0, \quad i = 1,2,3,$$
$$\eta(e^1, e^2) = \eta(e^1, e^3) = \eta(e^2, e^3) = p \neq 0,$$
$$\eta(e^2, e^1) = \eta(e^3, e^1) = \eta(e^3, e^2) = -p.$$

显然, $\eta = -\eta\tau$. 下面, 由命题 3 所定义的 $[\cdot,\cdot]$ 构造一个 Lie 双代数.

不难证明

$$[e^1, e^2] = -p(e^1 + e^2) = -[e^2, e^1],$$
$$[e^2, e^3] = p(e^2 + e^3) = -[e^3, e^2],$$
$$[e^1, e^3] = p(e^1 - e^3) = -[e^3, e^1].$$

因此

$$\begin{aligned}
&[e^1,[e^2,e^3]]+[e^2,[e^3,e^1]]+[e^3,[e^1,e^2]]\\
&\quad=[e^1,p(e^2+e^3)]+[e^2,p(e^3-e^1)]+[e^3,-p(e^1+e^2)]\\
&\quad=2p([e^1,e^3]+[e^1,e^2]+[e^2,e^3])\\
&\quad=2p(-pe^3+pe^1-pe^2-pe^1+pe^3+pe^2)=0.
\end{aligned}$$

余下的部分可以类似证明, 于是 $(E^3)^*$ 是一个 Lie 代数, 因此由命题 3 知: $(E^3)^*$ 是一个 Lie 双代数.

(2) 设 Γ 是一个以 $\{x,y\}$ 为基的向量空间, 定义

$$\Delta(x)=0,\quad \Delta(y)=y\otimes x-x\otimes y,$$

则不难证明 (Γ,Δ) 是一个 Lie 余代数.

设 $\eta:\Gamma\otimes\Gamma\to k, x\otimes x\mapsto 0, y\otimes y\mapsto 0, x\otimes y\mapsto -1, y\otimes x\mapsto 1$, 则 $\eta=-\eta\tau$.

由命题 3 所定义的 $[\cdot,\cdot]$, 可以证明

$$[x,x]=0,\quad [y,y]=0,\quad [x,y]=x,\quad [y,x]=-x,$$

因此 $(\Gamma,[\cdot,\cdot])$ 是一个 Lie 代数, 于是由命题 3 知: $(\Gamma,\Delta,[\cdot,\cdot])$ 是一个 Lie 双代数.

令 $r=x\otimes y-y\otimes x\in\Gamma\otimes\Gamma$, 则

$$\begin{aligned}
x\cdot r&=x\cdot(x\otimes y-y\otimes x)=x\cdot(x\otimes y)-x\cdot(y\otimes x)\\
&=[x,x]\otimes y+x\otimes[x,y]-[x,y]\otimes x-y\otimes[x,x]\\
&=0=\Delta(x).
\end{aligned}$$

类似地, 可以证明 $y\cdot r=\Delta(y)$, 因此 $(\Gamma,\Delta,[\cdot,\cdot])$ 是一个余边缘 Lie 双代数.

对元素 $r=x\otimes y-y\otimes x$, 有

$$\begin{aligned}
[r^{12},r^{13}]&=[x,x]\otimes y\otimes y-[x,y]\otimes y\otimes x-[y,x]\otimes x\otimes y+[y,y]\otimes x\otimes x\\
&=x\otimes x\otimes y-x\otimes y\otimes x,\\
[r^{12},r^{23}]&=y\otimes x\otimes x-x\otimes x\otimes y,\\
[r^{13},r^{23}]&=x\otimes y\otimes x-y\otimes x\otimes x.
\end{aligned}$$

因此 $[r^{12},r^{13}]+[r^{12},r^{23}]+[r^{13},r^{23}]=0$, 故 r 是经典 Yang-Baxter 方程的解, $(\Gamma,\Delta,[\cdot,\cdot],r)$ 是三角 Lie 双代数.

例 4 设 $\mathbb{R}$ 是一个实数域, $\Gamma=\oplus_{i=1}^{\infty}Rt_i$ 是由可数个元素 $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ 生成的无限维向量空间, 如果定义

$$\begin{aligned}
&\Delta:\Gamma\to\Gamma\otimes\Gamma,\\
&\Delta(t_k)=t_1\otimes t_k-t_k\otimes t_1, k=1,2,3,\ldots,
\end{aligned}$$

则不难证明 (Γ,Δ) 是一个 Lie 余代数.

(1) 设 $u:\Gamma\to k, t_1\mapsto 0, t_2\mapsto p\,(\neq 0), t_3\mapsto q\,(\neq 0,\pm p),\ldots; v:\Gamma\to k, t_1\mapsto 0, t_2\mapsto q, t_3\mapsto p,\ldots$, 则对任意 $t_k\in\Gamma$,

$$\begin{aligned}
(I\otimes u)\Delta(t_k)&=u(t_k)t_1,\\
(I\otimes v)\Delta(t_k)&=v(t_k)t_1.
\end{aligned}$$

令 $\eta = u\otimes v - v\otimes u$, 则根据定理 2, $(\Gamma,\Delta,[\cdot,\cdot])$ 是一个 Lie 双代数, 其中 $[t_i,t_j] = \Sigma(2u(t_i)v(t_j)t_1 - 2v(t_i)u(t_j)t_1)$.

(2) 设 $\tilde{u}:\Gamma\to k, t_1\mapsto 0, t_2\mapsto p\,(\neq 0), t_3\mapsto q\,(\neq 0,\pm p), t_i\mapsto 0\,(i=4,5,\ldots); \tilde{v}:\Gamma\to k, t_1\mapsto 0, t_2\mapsto q, t_3\mapsto p, t_i\mapsto 0\,(i=4,5,\ldots)$, 则易证 $(\Gamma,\Delta,[\cdot,\cdot])$ 是一个 Lie 双代数, 但它不是余边缘 (三角)Lie 双代数. 这是因为对任意 $r\in\Gamma\otimes\Gamma, t_4\in\Gamma, \Delta(t_4)=t_1\otimes t_4 - t_4\otimes t_1\neq 0 = t_4\cdot r$.

例 5 设 $\Gamma=\mathrm{span}\{H,X,Y\}$ 是一个 Lie 余代数, 它的 Lie 余模乘法为

$$\Delta(H)=0, \Delta(X)=\frac{1}{2}(X\otimes H - H\otimes X), \quad \Delta(Y)=\frac{1}{2}(Y\otimes H - H\otimes Y).$$

如果存在两个线性无关元素 $u,v\in\Gamma^*$, $u(H)=0=v(H)$, 并令 $\eta=u\otimes v - v\otimes u$, 则由命题 3 所定义的 $[\cdot,\cdot]$, $(\Gamma,\Delta,[\cdot,\cdot], r=\frac{1}{2}p^{-1}(X\otimes Y - Y\otimes X)+a(H\otimes X - X\otimes H)+b(H\otimes Y - Y\otimes H))$ 是余边缘 Lie 双代数, 但不是三角 Lie 双代数.

事实上, 如果设 $t=-\frac{1}{2}H$, 则对任意 $m\in\Gamma$,

$$(I\otimes u)\Delta(m)=u(m)t; \quad (I\otimes v)\Delta(m)=v(m)t.$$

因此根据定理 2, $(\Gamma,\Delta,[\cdot,\cdot])$ 是 Lie 双代数, 它的扩积 $[\cdot,\cdot]$ 为

$$[H,X]=0=[X,H], \quad [H,Y]=0=[Y,H],$$
$$[X,Y]=v(X)u(Y)H - u(X)v(Y)H = pH = -[Y,X].$$

对上面的 Lie 双代数 Γ, 构造所有的余边缘 Lie 双代数.

设 $r=c(X\otimes Y - Y\otimes X)+a(H\otimes X - X\otimes H)+b(H\otimes Y - Y\otimes H)\in\mathrm{Im}(I-\tau)$, 则不难证明

$$H\cdot r=0, \quad X\cdot r = pc(X\otimes H - H\otimes X), \quad Y\cdot r = pc(Y\otimes H - H\otimes Y).$$

因此, 由定义 3 知: $\Delta(H)=0=H\cdot r$, $\Delta(X)=X\cdot r$ 当且仅当 $cp=\frac{1}{2}$, $\Delta(Y)=Y\cdot r$ 当且仅当 $cp=\frac{1}{2}$.

故 $(\Gamma,\Delta,[\cdot,\cdot], r=c(X\otimes Y - Y\otimes X)+a(H\otimes X - X\otimes H)+b(H\otimes Y - Y\otimes H))$ 是余边缘 Lie 双代数当且仅当 $cp=\frac{1}{2}$.

于是 $(\Gamma,\Delta,[\cdot,\cdot], r=\frac{1}{2}p^{-1}(X\otimes Y - Y\otimes X)+a(H\otimes X - X\otimes H)+b(H\otimes Y - Y\otimes H))$ 是余边缘 Lie 双代数.

令 $r=H\otimes X - X\otimes H$ 或 $r=H\otimes Y - Y\otimes H$, 则

$$[r^{12},r^{13}]=[r^{12},r^{23}]=[r^{13},r^{23}]=0.$$

设 $r=X\otimes Y - Y\otimes X$, 则容易证明

$$\begin{aligned}[r^{12},r^{13}]+[r^{12},r^{23}]+[r^{13},r^{23}] = p(&H\otimes X\otimes Y - H\otimes Y\otimes X - X\otimes H\otimes Y\\ &+Y\otimes H\otimes X + X\otimes Y\otimes H - Y\otimes X\otimes H)\neq 0,\end{aligned}$$

因此, 对元素 $r=\frac{1}{2}p^{-1}(X\otimes Y - Y\otimes X)+a(H\otimes X - X\otimes H)+b(H\otimes Y - Y\otimes H)$,

$$[r^{12},r^{13}]+[r^{12},r^{23}]+[r^{13},r^{23}]\neq 0,$$

故 $(\Gamma,\Delta^L,[\cdot,\cdot], r=\frac{1}{2}p^{-1}(X\otimes Y - Y\otimes X)+a(H\otimes X - X\otimes H)+b(H\otimes Y - Y\otimes H))$ 不是三角 Lie 双代数.

致谢 作者十分感谢评审专家的有益建议. 本文的部分工作是作者在访问阿根廷 Ciudad 大学期间完成的.

参考文献

1 Michaelis W. Lie coalgebras. *Adv Math*, **38**: 1–54 (1980)

2 Drinfel'd V G. Quantum Groups. In: International Congress of Mathematicians. Providence: Amer Math Soc, 1990, 798–820

3 Michaelis W. A class of infinite-dimensional Lie bialgebras containg the Virasoro algebra. *Adv Math*, **107**: 365–392 (1994)

4 Wu Y Z, Song G A, Su Y C. Lie bialgebras of generalized Virasoro-like type. *Acta Math Sin-English Ser*, **22**(6): 1915–1922 (2006)

5 Song G A, Su Y C. Lie bialgebras of generalized Witt type. *Sci China Ser A-Math*, **49**(4): 533–544 (2006)

6 Zhang L Y. (H, R)-Lie coalgebras and (H, R)-Lie bialgebras. *Sib Math J*, **47**(4): 767–778 (2006)

7 Majid S. Foundation of Quantum Group Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1995

8 Kassel C. Quantum Groups. Berlin: Springer-Verlag, 1995