中国科学 A辑: 数学 2008 年 第 38 卷 第 5 期: 556～566
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

基于特征列方法和 Wronskian 行列式的曲面定理机器证明

冯如勇 ①*, 于建平 ②

① 中国科学院数学与系统科学研究院数学机械化重点实验室, 北京 100190
② 北京科技大学数学力学系, 北京 100083
* E-mail: ryfeng@amss.ac.cn

收稿日期: 2007-09-17; 接受日期: 2007-12-13
国家重点基础研究项目 (批准号: 2004CB318000) 资助

摘要 将 Chou 与 Gao 的关于微分几何中曲线定理机器证明的方法推广到微分几何曲面定理中. 改进了经典的 Wronskian 行列式, 它可以用于判断微分域中的有限个元素是否在其常数域上线性相关. 基于 Wronskian 行列式, 可以用代数语言来描述微分几何曲面理论中的几何表述, 进而用特征列方法来证明这些定理.

关键词 定理机器证明 特征列方法 Wronskian 行列式 曲面的局部理论

MSC(2000) 主题分类 12H99, 53A05

1 引言

几何定理的机器证明始于 19 世纪 50 年代 Gelernter[1] 和他的合作者的工作. 由于当时仅仅局限于传统的方法, 所以无法有效地进行非平凡几何定理机器证明. 直到上个世纪 70 年代末, 新的有效方法的出现, 比如吴方法 [2−4] 和 Gröbner 基方法 [5], 揭开了几何定理机器证明的新篇章. 基于 Wu-Ritt 特征列方法, Chou[6] 机器证明和发现了 Euclid 几何和非 Euclid 几何中上百个非平凡几何定理. 1993 年 Chou 和 Gao[7−10] 改进了微分 Wu-Ritt 零点分解算法并应用其证明了许多非平凡微分几何定理和基本力学定律, 如 Bertrand 定理和 Newton 重力定律. Cao 与 Li[11] 提出了一种以外微分运算和向量计算为主要工具, 可以进行有关曲面上曲线局部性质的定理机器证明的算法. 应用微分多项式的特征列方法, Li[12] 发现了无脐点曲面第一基本形式和第二基本形式的新关系并机器证明了一些非平凡定理. Li[13] 应用特征列和微分形式的积分方法证明了微分几何中著名的陈氏定理. Ferro[14] 提出了基于 Gröbner 基的微分几何定理机器证明的方法.

本文将 Chou 与 Gao[8] 关于曲线的结果推广到曲面中. 我们的方法基于 Wu-Ritt 特征列和简化后的 Wronskian 行列式. 微分几何定理机器证明中重要的环节是把几何语言转换成代

数语言. 经典的 Wronskian 行列式提供了一种用代数语言描述几何表述的方法, 如曲线理论中的 "切线过定点". 而对于曲面理论, 我们需要把曲线理论中用到的 Wronskian 行列式进行相应的推广. 这一推广由 Kolchin 在文献 [15, p. 86, Th. 1] 中给出. 在 Kolchin 的结论中, 为了确定带有两个导子的微分域中的 n 个元素是否在其常数域上线性相关, 最坏的情形需要计算大约 $n!(n+1)!/2^n$ 个行列式. 本文改进了这个结果, 最多只需要计算 n^2-2n+2 个行列式. 这一结果大大简化了计算.

我们在 Maple 软件中实现了算法并机器证明了一些曲面定理. 在计算特征列的过程中, 偏微分情形与常微分情形的主要差别在于在偏微分情形增加了可积性条件, 这使得计算特征列时计算量大大增加. 为了证明更复杂的曲面定理, 我们需要给出更有效的计算偏微分多项式特征列的算法.

2 Wu-Ritt 特征列方法

本节将介绍微分代数和特征列方法的一些基本概念以及所需要的结果. 详细的介绍可参考文献 [4] 及文献 [15, 16] 的第一章. 微分域是由代数域 $\mathscr{F}$ 以及定义在其上面的有限个微分导子 $\Delta=\{\delta_i, i=1,\dots,m\}$ 组成, 且对于任意的 $a,b\in\mathscr{F}$, 这些导子满足如下条件:

(i) $\delta_i(a+b)=\delta_i a+\delta_i b$;

(ii) $\delta_i(ab)=b\delta_i a+a\delta_i b$;

(iii) 对于任意的 i 和 j, $\delta_j(\delta_i a)=\delta_i(\delta_j a)$.

令 Θ 为由 Δ 生成的自由交换含幺半群, 称 Θ 中的元素为微分算子. Θ 中的任一元素 θ 具有 $\prod\delta_i^{k_i}$ 形式. 我们称整数 $\sum k_i$ 为 θ 的阶, 记为 $\mathrm{ord}(\theta)$. 令 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{F}$ 为两微分域. 如果 $\mathscr{F}\subseteq\mathscr{E}$ 并且当把 $\mathscr{E}$ 中的微分算子限制到 $\mathscr{F}$ 上, 它们与 $\mathscr{F}$ 中的算子是相容的, 则称 $\mathscr{F}$ 为 $\mathscr{E}$ 的子域, $\mathscr{E}$ 称为域 $\mathscr{F}$ 的扩域. 本文令 $\mathscr{F}$ 为关于变量 u 和 v 及它们的微分算子 $\partial/\partial u$ 与 $\partial/\partial v$ 的有理函数域 $\mathbb{R}(u,v)$, 其中 $\mathbb{R}$ 是实数域. 为方便起见, 对于任意的非负整数 i 和 j, 用 $\partial_{i,j}$ 来表示 $\frac{\partial^{i+j}}{\partial u^i\partial v^j}$. 令 $x_1,\dots,x_n$ 为未定元. 系数在 $\mathscr{F}$ 中关于变量 $\frac{\partial^{i+j}x_k}{\partial u^i\partial v^j}$ 的多项式 P 称为关于 $x_1,\dots,x_n$ 的微分多项式. 记关于 $x_1,\dots,x_n$ 的微分多项式的集合为 $\mathscr{F}\{x_1,\dots,x_n\}=\mathscr{F}\{X\}$. $\mathscr{F}\{X\}$ 的非空子集 I 称为 $\mathscr{F}\{X\}$ 的理想, 如果对于任意的 $f,g\in I, h\in\mathscr{F}\{X\}$, 有 $f+g\in I$, $fg\in I$, $hf\in I$, $\partial g/\partial u$ 且 $\partial g/\partial v\in I$. 理想 I 称为 $\mathscr{F}\{X\}$ 的根理想, 如果对任意的 $f\in\mathscr{F}\{X\}$ 和正整数 n, $f^n\in I$ 意味着 $f\in I$. 令 $\mathbb{S}$ 为 $\mathscr{F}\{X\}$ 中的非空子集, 包含 $\mathbb{S}$ 的最小理想 I 称为由 $\mathbb{S}$ 生成的理想, 记为 $\mathrm{Ideal}(\mathbb{S})$. 事实上, $\mathrm{Ideal}(\mathbb{S})$ 由 $\mathbb{S}$ 中的微分多项式和它们偏导的线性组合构成. 我们用 $\{\mathbb{S}\}$ 表示由 $\mathbb{S}$ 生成的根理想.

定义 1 $(x_1,\dots,x_n)$ 的序是指 $\Theta X=\{\theta x_i, i=1,2,\dots,n, \theta\in\Theta\}$ 上的一个全序, 其满足: 对于任意的 $u\in\Theta X$ 和 $\partial\in\Delta$, 有 $\partial u\geqslant u$, 并且对于任意的 $u,v\in\Theta X$, $\partial\in\Delta$, 由 $u\geqslant v$ 可得 $\partial u\geqslant\partial v$.

我们称 ΘX 中的元素为微分. 根据 Dickson 引理, 任意序依次下降的微分序列是有限的. 对于给定的 $(x_1,\dots,x_n)$ 的序, 我们用 $u<v$ 表示 u 的序比 v 的序低, 或者 v 的序比 u 的序高, 其中 $u,v\in\Theta X$.

注 1 本文在 $\Theta X=\{\partial_{i,j}x_k, k=1,2,\dots,n; i,j$ 为非负整数$\}$ 上将一直沿用下面的序关系, 其中 $\partial_{i,j}=\frac{\partial^{i+j}}{\partial u^i\partial v^j}$. $\partial_{i_1,j_1}x_{k_1}>\partial_{i_2,j_2}x_{k_2}$, 如果它满足下面的条件之一:

(a) $x_{k_1}>x_{k_2}$;

(b) $x_{k_1} = x_{k_2}$ 且 $i_1 + j_1 > i_2 + j_2$;

(c) $x_{k_1} = x_{k_2}$, $i_1 + j_1 = i_2 + j_2$ 且 $i_1 > i_2$.

定义 2 令 P 为 $\mathscr{F}\{X\}$ 中的微分多项式. P 的首项为在 P 中出现的序最高的微分, 记为 L_P. 如果把 P 看作关于首项的单变量多项式, 则 P 的首项系数称为 P 的首系, 记为 I_P. P 的隔离子为 $\partial P/\partial L_P$, 记为 S_P.

根据上面的定义, 对于微分多项式 $P \in \mathscr{F}\{X\}$, 可以把 P 写为下面的标准形式:

$$P = I_P L_P^d + I_1 L_P^{d-1} + \cdots + I_d,$$

P 的隔离子为

$$\partial P/\partial L_P = dI_P L_P^{d-1} + (d-1)I_1 L_P^{d-2} + \cdots + I_{d-1}.$$

定义 3 对于 $\mathscr{F}\{X\}$ 中的微分多项式 P 和 Q, P 的序比 Q 的序高, 记为 $P \succ Q$, 如果 $L_P > L_Q$; 或 $L_P = L_Q$ 但 $\deg(P, L_P) > \deg(Q, L_P)$. 如果 $P \succ Q$ 不成立, 同时 $P \prec Q$ 也不成立, 则称 P 和 Q 的序不可比, 记为 $P \sim Q$.

注 2 含有未定元的微分多项式的序永远高于不含有任何未定元的微分多项式的序.

对于 $\mathscr{F}\{X\}$ 中的微分多项式 P 和 Q, P 称为关于 Q 是部分约化的, 如果不存在阶大于零的微分算子 θ, 使得 $\theta(L_Q)$ 出现在 P 中. P 称为关于 Q 是约化的, 如果 P 关于 Q 是部分约化的且 $\deg(P, L_Q) < \deg(Q, L_Q)$. 微分多项式 P 称为关于微分多项式集 $\mathbb{P}$ 是 (部分) 约化的, 如果它关于 $\mathbb{P}$ 中的任一多项式是 (部分) 约化的. $\mathscr{F}\{X\}$ 的子集 $\mathbb{P}$ 称为升列, 如果 $\mathbb{P} = \{f\}$, 其中 $f \in \mathscr{F}$, 或者任意 $\mathbb{P}$ 中的元素均不属于 $\mathscr{F}$ 且 $\mathbb{P}$ 中的元素可按照升序排成有限的序列, 使得每一微分多项式关于序比它低的微分多项式都是约化的.

定义 4 令 $\mathbb{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ 和 $\mathbb{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_s\}$ 为 $\mathscr{F}\{X\}$ 中的两升列,

$$A_1 \prec A_2 \prec \cdots \prec A_r; \quad B_1 \prec B_2 \prec \cdots \prec B_s.$$

如果下面的条件之一成立, 则 $\mathbb{A}$ 称为具有比 $\mathbb{B}$ 低的序:

(i) 存在 $k \leqslant \min\{r, s\}$, 使得 $A_i \sim B_i$, 其中 $1 \leqslant i \leqslant k-1$, 且 $A_k \prec B_k$;

(ii) $r > s$ 并且 $A_i \sim B_i$, 对于任意的 $i \leqslant s$ 成立.

易见 $\mathscr{F}$ 中的元素具有最低的序, 且定义 4 引入了升列间的偏序关系.

命题 1 (参见文献 [16, p. 3] 或文献 [15, p. 77]) 任意由序依次降低的升列的组成的序列是有限的.

命题 1 保证对于微分多项式集 $\mathbb{P} \subset \mathscr{F}\{X\}$, 我们总能在有限步内找到升列 $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{P}$, 它的序不高于 $\mathbb{P}$ 中其余升列. 我们称此升列为 $\mathbb{P}$ 的特征列. 关于求微分多项式集的特征列的算法请参考文献 [2, 12]. 这里将不给出详细的表述. 接下来我们将给出特征列方法中重要的余式公式 (参见文献 [16, p. 165] 或文献 [2, 7, 12]).

定理 1 令 $\mathbb{A}: A_1 \prec A_2 \prec \cdots \prec A_r$ 为一升列. 对于任意的 $\mathscr{F}\{X\} \setminus \mathscr{F}$ 中的微分多项式 P, 存在非负整数 s_k 和 t_k $(k = 1, \ldots, r)$, 微分算子 $\partial_{\tau_{i,j}} \in \Theta$ 和微分多项式 $C_{\tau_{i,j}} \in \mathscr{F}\{X\}$, 使得

$$R = S_1^{s_1} \cdots S_r^{s_r} I_1^{t_1} \cdots I_r^{t_r} P - \sum_{i,j} C_{\tau_{i,j}} \partial_{\tau_{i,j}} A_i \tag{1}$$

关于 $\mathbb{A}$ 是约化的, 其中 S_i 和 I_i 分别为 A_i 的隔离子和首系.

定理中的公式称为 P 关于 $\mathbb{A}$ 的余式公式. 记 (1) 式中的 R 为 $\operatorname{Prem}(P, \mathbb{A})$.

例 1 令 $P = x\partial_{1,1}y - y$ 为 $\mathscr{F}\{x, y\}$ 中的微分多项式, 其中 $\mathscr{F} = \mathbb{R}(u, v)$. 令 $y > x$ 且沿用注 1 中的微分序关系, 则 $\mathscr{A} = \{y\partial_{0,1}y - x,\ x\partial_{1,0}y + y\}$ 为 $\mathscr{F}\{x, y\}$ 中的升列.

记 $A_1 = x\partial_{1,0}y + y$, $A_2 = y\partial_{0,1}y - x$. 因为

$$\partial_{0,1}A_1 = \partial_{0,1}x\partial_{1,0}y + x\partial_{1,1}y + \partial_{0,1}y,$$
$$P = x\partial_{1,1}y - y = \partial_{0,1}A_1 - \partial_{0,1}x\partial_{1,0}y - \partial_{0,1}y - y,$$

所以有

$$\begin{aligned} xP &= x\partial_{0,1}A_1 - x\partial_{0,1}x\partial_{1,0}y - x\partial_{0,1}y - xy \\ &= x\partial_{0,1}A_1 - (A_1 - y)\partial_{0,1}x - x\partial_{0,1}y - xy \\ &= x\partial_{0,1}A_1 - A_1\partial_{0,1}x + y\partial_{0,1}x - x\partial_{0,1}y - xy. \end{aligned}$$

因为 $A_2 = y\partial_{0,1}y - x$, 有

$$\begin{aligned} xyP &= xy\partial_{0,1}A_1 - yA_1\partial_{0,1}x + y^2\partial_{0,1}x - xy\partial_{0,1}y - xy^2 \\ &= xy\partial_{0,1}A_1 - yA_1\partial_{0,1}x + y^2\partial_{0,1}x - x(A_2 + x) - xy^2 \\ &= xy\partial_{0,1}A_1 - yA_1\partial_{0,1}x + y^2\partial_{0,1}x - xA_2 - x^2 - xy^2 \\ &= xy\partial_{0,1}A_1 - yA_1\partial_{0,1}x - xA_2 + y^2\partial_{0,1}x - x^2 - xy^2, \end{aligned}$$

所以

$$y^2\partial_{0,1}x - x^2 - xy^2 = xyP - xy\partial_{0,1}A_1 + yA_1\partial_{0,1}x + xA_2$$

是 P 关于 $\mathbb{A}$ 的余式, 即 $\mathrm{Prem}(P, \mathbb{A}) = y^2\partial_{0,1}x - x^2 - xy^2$.

对于微分多项式集 $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \subset \mathscr{F}\{X\} = \mathscr{F}\{x_1, \dots, x_n\}$, 令

$$\mathrm{Zero}(\mathbb{P}) = \{z \in \mathscr{E}^n | \forall P \in \mathbb{P}, P(z) = 0\}$$

为微分多项式集 $\mathbb{P}$ 在 $\mathscr{E}^n$ 中的零点的集合, 其中 $\mathscr{E}$ 为 $\mathscr{F}$ 的扩域, 则

$$\mathrm{Zero}(\mathbb{P}) = \mathrm{Zero}(\mathrm{Ideal}(\mathbb{P})) = \mathrm{Zero}(\{\mathbb{P}\}).$$

令

$$\mathrm{Zero}(\mathbb{P}/\mathbb{Q}) = \mathrm{Zero}(\mathbb{P}) \setminus \bigcup_{Q \in \mathbb{Q}} \mathrm{Zero}(Q).$$

下面是本文中需要的 Wu-Ritt 分解定理 [4].

定理 2 对于有限的微分多项式集 $\mathbb{A} \subseteq \mathscr{F}\{X\}$, 存在算法, 其在有限步内给出有限个升列 $\mathbb{C}_i$, 使得

$$\mathrm{Zero}(\mathbb{A}) = \bigcup_{i=0}^{s} \mathrm{Zero}(\mathbb{C}_i/\mathrm{IS}_i),$$

其中 IS_i 为 $\mathbb{C}_i$ 的首系和隔离子的乘积.

计算微分多项式的特征列的算法目前已经在多个数学软件中实现, 比如 Wsolve, Maple 中的 diffalg 包, Aldor 等. 本文将用 diffalg 来计算微分多项式集的特征列. diffalg 中的 “Rosenfeld_Groebner” 命令把微分根理想分解成可特征化的微分理想的交, 这些微分理想由特征列表示 [17]. 命令 “reduced_form($P, \{\mathbb{P}\}$)” 计算出 P 在模根理想 $\{\mathbb{P}\}$ 下的约化形式, 其等价于计算余式. 因此我们将用 reduced_form 来计算余式.

下面的算法将给出微分几何定理机器证明的基本原理.

定义 5 公式

$$\forall x_1,\dots,x_n,\quad [(H_1=0\wedge\cdots\wedge H_r=0\wedge D_1\neq 0\wedge\cdots\wedge D_t\neq 0)\Rightarrow \mathbb{S}=0]$$

称为等式型的表述, 其中 $H_i\,(i=1,\dots,r), D_i\,(i=1,\dots,t)$ 为 $\mathscr{F}\{X\}$ 中的微分多项式且 $\mathbb{S}$ 是 $\mathscr{F}\{X\}$ 的有限集合. 称 $\mathbb{H}=\{H_1,\dots,H_r\}$ 为条件微分多项式集, 称 $\mathbb{S}$ 为结论微分多项式集. $\mathbb{D}=\{D_1,\dots,D_t\}$ 通常称为退化条件.

定义 6 称等式型的表述在 $\mathscr{F}$ 的扩域 $\mathscr{E}$ 中是正确的, 如果

$$\forall(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathscr{E}^n,\quad [(H_1=0\wedge H_r=0\wedge D_1\neq 0\wedge\cdots\wedge D_t\neq 0)\Rightarrow \mathbb{S}=0].$$

表述称为是普遍正确的, 如果它在 $\mathscr{F}$ 的任意扩域上都是正确的. 这里 $\mathbb{S}=0$ 是指 $\mathbb{S}$ 中的微分多项式在零点集 $\mathrm{Zero}(\mathbb{H}\setminus\mathbb{D})$ 上化零, 即 $\mathrm{Zero}(\mathbb{H}\setminus\mathbb{D})\subseteq\mathrm{Zero}(\mathbb{S})$.

注意到对于特阵列 $\mathbb{C}$ 以及微分多项式 P, 如果 $\mathrm{Prem}(P,\mathbb{C})=0$ 则 $\mathrm{Zero}(\mathbb{C}\setminus\mathrm{IS}_i)\subseteq\mathrm{Zero}(P)$. 由此我们有下面的算法:

算法 1 确定等式型的表述是否普遍正确.

1. 根据定理 2, 我们可以计算

$$\mathrm{Zero}(\mathbb{H}/\mathbb{D})=\bigcup_{i=0}^{s}\mathrm{Zero}(\mathbb{C}_i/\{\mathrm{IS}_i,\mathbb{D}\}).$$

2. 如果 $s=0$ 或对于任意的 $i=1,\dots,s$ 有 $\mathrm{Prem}(\mathbb{S},\mathbb{C}_i)=0$, 则等式型的表述是普遍正确的.

3 检验线性相关性的 Wronskian 行列式

本部分将改进文献 [15, p. 86, Th. 1] 中 Kolchin 的结果. 令 $\Theta(s)=\{\theta\in\Theta,\mathrm{ord}(\theta)\leqslant s\}$. 记 $\mathscr{F}$ 的常数域为 $\mathscr{C}$. Kolchin 证明了下面的定理, 推广了关于 Wronskian 行列式的经典结果:

定理 3[15] 令 $\eta_j=(\eta_{j,1},\dots,\eta_{j,r})\,(1\leqslant j\leqslant n)$ 为 $\mathscr{F}^r$ 中的元素. 如果它们在 $\mathscr{C}$ 上是线性相关的, 则对于任意的 $\theta_1,\dots,\theta_n\in\Theta$ 和任意的 $k(1),\dots,k(n)\in\{1,2,\dots,n\}$ 有

$$\det(\theta_i\eta_{j,k(i)})_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant n}=0. \tag{2}$$

反之, 如果 (2) 式对于任意的 $\theta_1,\dots,\theta_n$ 和任意的 $k(1),\dots,k(n)$ 成立, 其中 $\theta_i\in\Theta(i-1)\,(1\leqslant i\leqslant n)$ 以及 $k(i)\in\{1,2,\dots,n\}$, 则 $\eta_1,\dots,\eta_n$ 在 $\mathscr{C}$ 上是线性相关的.

在 $r=1$ 且只有两个导子的情形下, $|\Theta(s-1)|=\frac{s(s+1)}{2}$, 则 (2) 式中行列式的数目为 $n!(n+1)!/2^n$. 事实上, 在 (2) 式中有许多行列式是自动为零的, 因而它们不需要计算. 下面的推论改进了定理 3.

推论 1 令 $\mathscr{F}$ 为微分域, $\mathscr{C}$ 为其常数域. δ_1 和 δ_2 为两个导子, Θ 为由 δ_1 和 δ_2 生成的含幺交换半群, $x_1,\dots,x_n\in\mathscr{F}$. 对于 $i=1,\dots,n-1$, 如果存在 $\tau_i\in\Theta(i-1)$, 使得 $\gamma_i=(\tau_i x_1,\dots,\tau_i x_n)\,(1\leqslant i\leqslant n-1)$ 在 $\mathscr{F}$ 上是线性无关的, 则 $x_1,\dots,x_n$ 在 $\mathscr{C}$ 上线性相关的当且仅当下面的 $2(n-1)$ 个行列式

$$\begin{vmatrix} \tau_1x_1 & \tau_1x_2 & \cdots & \tau_1x_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \tau_{n-2}x_1 & \tau_{n-2}x_2 & \cdots & \tau_{n-2}x_n\\ \tau_{n-1}x_1 & \tau_{n-1}x_2 & \cdots & \tau_{n-1}x_n\\ \delta_1\tau_ix_1 & \delta_1\tau_ix_2 & \cdots & \delta_1\tau_ix_n \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} \tau_1x_1 & \tau_1x_2 & \cdots & \tau_1x_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \tau_{n-2}x_1 & \tau_{n-2}x_2 & \cdots & \tau_{n-2}x_n\\ \tau_{n-1}x_1 & \tau_{n-1}x_2 & \cdots & \tau_{n-1}x_n\\ \delta_2\tau_ix_1 & \delta_2\tau_ix_2 & \cdots & \delta_2\tau_ix_n \end{vmatrix},\quad 1\leqslant i\leqslant n-1$$

都等于零. 注意到我们有 $\tau_1 = 1$.

证明 "$\Rightarrow$" 由定理 3 易得.

"$\Leftarrow$" 在定理 3 中, 令 $r = 1$ 和 $\eta_i = \tau_1 x_i = x_i$, 则根据定理 3, 仅仅需要证明对于任意的 $\theta_1, \ldots, \theta_n$, $\theta_i \in \Theta(i-1)$, $\det(\theta_i x_j)_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n} = 0$ 成立. 假设 $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ 在 $\mathscr{F}$ 上是线性无关的. 因为 $2(n-1)$ 个行列式全都等于 0, 所以对于任意的 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\delta_1 \gamma_i = (\delta_1 \tau_i x_1, \ldots, \delta_1 \tau_i x_n)$, $\delta_2 \gamma_i = (\delta_2 \tau_i x_1, \ldots, \delta_2 \tau_i x_n)$ 为 $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ 的线性组合. 由于只有两个可交换的导子 δ_1 和 δ_2, 任一 $\theta \in \Theta$ 可写为 $\delta_1^k \delta_2^l$. 对于 k 和 l 应用归纳, 容易证明对于任意的非负整数 k, l, $\delta_1^k \delta_2^l \gamma_1$ 为 $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ 的线性组合. 因为 $\gamma_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, 所以 $\det(\theta_i x_j)_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n} = 0$ 对任意的 $\theta_1, \ldots, \theta_n$ 都成立, 其中 $\theta_i \in \Theta(i-1)$.

从上面的推论我们可以按照如下步骤来判定 $x_1, \ldots, x_n$ 是否在常数域上线性相关: 首先, 令

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ \delta_1 x_1 & \delta_1 x_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ \delta_2 x_1 & \delta_2 x_2 \end{pmatrix}.$$

如果 $\det(A) = \det(B) = 0$, 则根据推论 1, x_1 和 x_2 在常数域上线性相关的, 从而有 $x_1, \ldots, x_n$ 在常数域上是线性相关的. 否则, 不失一般性, 假设 $\det(A) \neq 0$, 则 (x_1, x_2) 和 $(\delta_1 x_1, \delta_1 x_2)$ 为线性无关的, 进而 (x_1, x_2, x_3) 与 $(\delta_1 x_1, \delta_1 x_2, \delta_1 x_3)$ 线性无关. 令矩阵 M_1, M_2, M_3, M_4 分别为

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \delta_1 x_1 & \delta_1 x_2 & \delta_1 x_3 \\ \delta_1 x_1 & \delta_1 x_2 & \delta_1 x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \delta_1 x_1 & \delta_1 x_2 & \delta_1 x_3 \\ \delta_1 \delta_1 x_1 & \delta_1 \delta_1 x_2 & \delta_1 \delta_1 x_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \delta_1 x_1 & \delta_1 x_2 & \delta_1 x_3 \\ \delta_2 x_1 & \delta_2 x_2 & \delta_2 x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \delta_1 x_1 & \delta_1 x_2 & \delta_1 x_3 \\ \delta_2 \delta_1 x_1 & \delta_2 \delta_1 x_2 & \delta_2 \delta_1 x_3 \end{pmatrix}.$$

如果 $\det(M_1) = \det(M_2) = \det(M_3) = \det(M_4) = 0$, 则根据推论 1, x_1, x_2, x_3 在常数域上线性相关的, 进一步 $x_1, \ldots, x_n$ 在常数域上是线性相关的. 否则, x_1, x_2, x_3 为线性无关的. 对 x_1, x_2, x_3, x_4 重复上面的过程, 则最多需要计算 $n(n-1)$ 个矩阵的行列式. 事实上, 因为推论 1 中 τ_2 只有 δ_1 和 δ_2 两种选择, 我们有 $\det(C) = 0$ 或 $\det(D) = 0$, 其中

$$C = \begin{pmatrix} \tau_1 x_1 & \tau_1 x_2 & \cdots & \tau_1 x_n \\ \tau_2 x_1 & \tau_2 x_2 & \cdots & \tau_2 x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n-1} x_1 & \tau_{n-1} x_2 & \cdots & \tau_{n-1} x_n \\ \delta_1 x_1 & \delta_1 x_2 & \cdots & \delta_1 x_n \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \tau_1 x_1 & \tau_1 x_2 & \cdots & \tau_1 x_n \\ \tau_2 x_1 & \tau_2 x_2 & \cdots & \tau_2 x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n-1} x_1 & \tau_{n-1} x_2 & \cdots & \tau_{n-1} x_n \\ \delta_2 x_1 & \delta_2 x_2 & \cdots & \delta_2 x_n \end{pmatrix}.$$

所以仅需要计算 $n^2 - 2n + 2\,(= n(n-1) - n + 2)$ 个行列式来验证 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是否在常数域上线性相关.

注 3 为方便起见, 在文章剩下的部分用 $\mathrm{WR}(x_1, \ldots, x_n)$ 表示推论 1 中的所有行列式, $\mathrm{WR}(x_1, \ldots, x_n) = 0$ 表示所有 $\mathrm{WR}(x_1, \ldots, x_n)$ 中的行列式等于零. 因而如果 $\mathrm{WR}(x_1, \ldots, x_n)$

$=0$, 则 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 在 $\mathscr{F}$ 的常数域上是线性相关的; 否则 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 在 $\mathscr{F}$ 的常数域上是线性无关的.

4 曲面局部理论中的定理机器证明

4.1 曲面局部理论

回顾曲面局部理论中的基本概念. 令 (u,v) 和 (x,y,z) 分别为维数为 2 和 3 的 Euclid 空间上的点的坐标. 曲面的参数表示为

$$r = r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),$$

其中 $x(u,v)$, $y(u,v)$ 和 $z(u,v)$ 为 u 和 v 的函数.

为简单起见, 我们用 $x_{i,j}$ 表示 $\frac{\partial^{i+j}x}{\partial^i u \partial^j v}$, $y_{i,j}, z_{i,j}$ 及 $n_{1i,j}$, $n_{2i,j}$, $n_{3i,j}$ 类似.

令 $p=(x,y,z)$, $n=(n_1,n_2,n_3)$, 其中 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$. 视 x,y,z,n_i 为微分未定元. 我们用下面的微分方程表示曲面局部理论中的基本概念. 这些方程是用代数语言来刻画曲面局部理论所必需的.

(i) 曲面 r 在点 $p(x,y,z)$ 的曲率为 k,

$$k^2-(x_{1,0}y_{0,1}-y_{1,0}x_{0,1})^2-(y_{1,0}z_{0,1}-z_{1,0}y_{0,1})^2-(z_{1,0}x_{0,1}-x_{1,0}z_{0,1})^2=0.$$

(ii) 曲面 r 在点 $p(x,y,z)$ 的单位法向量为 $n=(n_1,n_2,n_3)$,

$$\begin{aligned} &kn_1-y_{1,0}z_{0,1}+y_{0,1}z_{1,0}=0\wedge\\ &kn_2-z_{1,0}x_{0,1}+z_{0,1}x_{1,0}=0\wedge\\ &kn_3-x_{1,0}y_{0,1}+x_{0,1}y_{1,0}=0. \end{aligned}$$

(iii) 曲面 r 的第 1 基本形式为 $I=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$,

$$\begin{aligned} &E-x_{1,0}^2-y_{1,0}^2-z_{1,0}^2=0\wedge\\ &F-x_{1,0}x_{0,1}-y_{1,0}y_{0,1}-z_{1,0}z_{0,1}=0\wedge\\ &G-x_{0,1}^2-y_{0,1}^2-z_{0,1}^2=0. \end{aligned} \tag{3}$$

(iv) 曲面 r 的第 2 基本形式为 $II=Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2$,

$$\begin{aligned} &L+n_{1_{1,0}}x_{1,0}+n_{2_{1,0}}y_{1,0}+n_{3_{1,0}}z_{1,0}=0\wedge\\ &M+n_{1_{0,1}}x_{1,0}+n_{2_{0,1}}y_{1,0}+n_{3_{0,1}}z_{1,0}=0\wedge\\ &N+n_{1_{0,1}}x_{0,1}+n_{2_{0,1}}y_{0,1}+n_{3_{0,1}}z_{0,1}=0. \end{aligned} \tag{4}$$

4.2 一些基本语言

沿用上面的点 $p=(x,y,z)$ 和法向量 $n=(n_1,n_2,n_3)$ 的表示形式. 由改进的 Wronskian 行列式, 我们可以将下面关于曲面理论的论断用代数语言来刻画. 注意到下面的方程组仅仅是论断成立的充分条件而不是必要条件.

1. 过点 p 且法向量为 n 的平面过定点. 方程为

$$\mathrm{WR}(n_1,n_2,n_3,n_1x+n_2y+n_3z)=0\wedge \mathrm{WR}(n_1,n_2,n_3)\neq 0.$$

我们知道过点 p 且法向量为 n 的平面的方程为:

$$n_1(X-x)+n_2(Y-y)+n_3(Z-z)=0.$$

由上述条件可知存在常数 c_1, c_2, c_3 以及 $c_4 \neq 0$, 使得

$$c_1n_1 + c_2n_2 + c_3n_3 + c_4(n_1x + n_2y + n_3z) = 0.$$

因而这些平面过定点 $(-\frac{c_1}{c_4}, -\frac{c_2}{c_4}, -\frac{c_3}{c_4})$.

2. 过点 p 且法向量为 n 的平面过定直线, 方程为

$$(\mathrm{WR}(n_1, n_2, n_3) = \mathrm{WR}(n_1, n_2, n_1x + n_2y + n_3z) = 0 \wedge \mathrm{WR}(n_1, n_2) \neq 0) \vee$$
$$(\mathrm{WR}(n_1, n_2, n_3) = \mathrm{WR}(n_1, n_3, n_1x + n_2y + n_3z) = 0 \wedge \mathrm{WR}(n_1, n_3) \neq 0) \vee$$
$$(\mathrm{WR}(n_1, n_2, n_3) = \mathrm{WR}(n_2, n_3, n_1x + n_2y + n_3z) = 0 \wedge \mathrm{WR}(n_2, n_3) \neq 0).$$

我们只对第 1 种情形做解释, 其他情形类似. 因为

$$\mathrm{WR}(n_1, n_2, n_1x + n_2y + n_3z) = 0 \wedge \mathrm{WR}(n_1, n_2) \neq 0,$$

所以这些平面过定点 $(a_1, a_2, 0)$, 其中 $a_1n_1 + a_2n_2 = n_1x + n_2y + n_3z$. 由 $\mathrm{WR}(n_1, n_2, n_3) = 0$, 所以这些平面垂直于定平面 $c_1X + c_2Y + c_3Z = 0$, 其中 $c_1n_1 + c_2n_2 + c_3n_3 = 0$. 因此, 这些平面包含过点 $(a_1, a_2, 0)$ 且垂直于平面 $c_1X + c_2Y + c_3Z = 0$ 的定直线. 而当 $a_1 = a_2 = 0$ 时, 这些平面包含垂直于平面 $c_1X + c_2Y + c_3Z = 0$ 于点 $(0, 0, 0)$ 的定直线.

3. 过点 p 且平行于向量 n 的直线过定点, 方程为

$$\mathrm{WR}(n_1n_3, n_1n_2, n_2n_3) \neq 0 \wedge$$
$$\mathrm{WR}(n_1, n_2, n_1y - n_2x) = 0 \wedge$$
$$\mathrm{WR}(n_1, n_3, n_1z - n_3x) = 0 \wedge$$
$$\mathrm{WR}(n_2, n_3, n_2z - n_3y) = 0.$$

由 $\mathrm{WR}(n_1n_3, n_1n_2, n_2n_3) \neq 0$, 有 $\mathrm{WR}(n_i, n_j) \neq 0$, 其中 $i, j = 1, 2, 3$ 且 $i \neq j$. 所以存在常数 a_i, b_i, 使得

$$n_1y - n_2x = a_1n_1 + b_1n_2; \tag{5}$$
$$n_1z - n_3x = a_2n_1 + b_2n_3; \tag{6}$$
$$n_2z - n_3y = a_3n_2 + b_3n_3. \tag{7}$$

由 $(5) * n_3 - (6) * n_2 + (7) * n_1$, 有

$$(a_1 + b_3)n_1n_3 + (a_3 - a_2)n_1n_2 + (b_1 - b_2)n_2n_3 = 0.$$

同样由 $\mathrm{WR}(n_1n_3, n_1n_2, n_2n_3) \neq 0$, 有

$$a_1 + b_3 = 0;\ a_3 - a_1 = 0;\ b_1 - b_2 = 0.$$

所以由 (5)–(7) 式,

$$n_1(y - a_1) = n_2(x + b_1);\ n_3(x + b_1) = n_1(z - a_2);\ n_2(z - a_2) = n_3(y - a_1).$$

因为 $\mathrm{WR}(n_1n_3, n_1n_2, n_2n_3) \neq 0$, n_1, n_2, n_3 中至少有两个不为 0, 不失一般性, 假设 $n_1n_2 \neq 0$. 令 $u = \frac{x+b_1}{n_1}$, 有 $x - un_1 = -b_1, y - un_2 = a_1$. 如果 $n_3 \equiv 0$, 则 $z \equiv a_2$, 否则 $z - un_3 = a_2$, 因此这些直线的方程为

$$X = x + tn_1,\ Y = y + tn_2,\ Z = z + tn_3,$$

这里为 t 为参数. 所以所有的直线过定点 $(-b_1, a_1, a_2)$.

5 例子

我们将用一些例子来解释机器证明的过程, 利用算法 1 证明下面例子中的论断是普遍成立的.

例 2 证明球面的所有法线过定点.

不失一般性, 可以假设球面的方程为 $x^2+y^2+z^2-r^2=0$, 这里 x,y,z 为微分域 $\mathbb{R}(u,v)$ 上的微分未定元以及 r 为常数. 球面的所有法线过点 (x,y,z) 并且平行于 (n_1,n_2,n_3). 利用第 4.1 节中关于单位法向量的定义方程, 我们有如下的假设条件集 $\mathbb{H}$:

$$
\begin{aligned}
&H_1=x^2+y^2+z^2-r^2;\\
&H_2=k^2-(x_{1,0}y_{0,1}-y_{1,0}x_{0,1})^2-(y_{1,0}z_{0,1}-z_{1,0}y_{0,1})^2-(z_{1,0}x_{0,1}-x_{1,0}z_{0,1})^2;\\
&H_3=kn_1-y_{1,0}z_{0,1}+y_{0,1}z_{1,0};\\
&H_4=kn_2-z_{1,0}x_{0,1}+z_{0,1}x_{1,0};\\
&H_5=kn_3-x_{1,0}y_{0,1}+x_{0,1}y_{1,0}.
\end{aligned}
$$

我们需要证明第 4.2 节中的第 3 个论断是否在这一假设条件集下成立, 因而结论集包含有 15 个微分多项式. 令 $n_3>n_2>n_1>z>y>x>k$ 并且应用注 1 中的序关系. 这里视 r 为参数. 如果 $k=0$, 则 $r=0$, 此时球面退化为一个点. 所以我们考虑 $\mathrm{Zero}(\{H_1,\dots,H_5\}/k)$. 应用 Maple 中的 diffalg 包, 我们得到

$$\mathrm{Zero}(\{H_1,\dots,H_5\}/k)=\mathrm{Zero}(\mathbb{C}_1/\{\mathrm{IS}_1,k\})\cup\mathrm{Zero}(\mathbb{C}_2/\{\mathrm{IS}_2,k\}),$$

其中

$$
\begin{aligned}
\mathbb{C}_1=\ &kn_3-x_{1,0}y_{0,1}+y_{1,0}x_{0,1},\\
&kn_2(x^2+y^2-r^2)+zx_{1,0}yy_{0,1}-zx_{0,1}yy_{1,0},\\
&kn_1(x^2+y^2-r^2)-zy_{1,0}xx_{0,1}+zy_{0,1}xx_{1,0},\\
&z^2+x^2+y^2-r^2,\\
&y_{1,0}^2x_{0,1}^2r^2+x_{1,0}^2r^2y_{0,1}^2-2x_{1,0}y_{1,0}x_{0,1}r^2y_{0,1}+k^2y^2+k^2x^2-k^2r^2;\\
\mathbb{C}_2=\ &kn_3-x_{1,0}y_{0,1},\\
&kn_2(x^2+y^2-r^2)+zx_{1,0}yy_{0,1},\\
&kn_1(x^2+y^2-r^2)+zy_{0,1}xx_{1,0},\\
&z^2+x^2+y^2-r^2,\\
&x_{1,0}^2r^2y_{0,1}^2+k^2x^2-k^2r^2+k^2y^2\\
&x_{0,1};
\end{aligned}
$$

其中 IS_1 和 IS_2 分别为 $\mathbb{C}_1$ 和 $\mathbb{C}_2$ 首系与隔离子的乘积. 令

$$
W=\begin{vmatrix}
n_1n_2 & n_1n_3 & n_2n_3\\
n_{11,0}n_2+n_1n_{21,0} & n_{11,0}n_3+n_1n_{31,0} & n_{21,0}n_3+n_2n_{31,0}\\
n_{10,1}n_2+n_1n_{20,1} & n_{10,1}n_3+n_1n_{30,1} & n_{20,1}n_3+n_2n_{30,1}
\end{vmatrix},
$$

我们有 $\mathrm{Prem}(W,\mathbb{C}_1)\neq 0$, 所以 $\mathrm{WR}(n_1n_2,n_1n_3,n_2n_3)\neq 0$. 考虑下面 4 个行列式:

$$D_i=\begin{vmatrix} n_1 & n_2 & n_1y-n_2x \\ n_{10,1} & n_{20,1} & n_{10,1}y-n_{20,1}x+n_1y_{0,1}-n_2x_{0,1} \\ \theta_i n_1 & \theta_i n_2 & \theta_i(n_1y-n_2x) \end{vmatrix},\quad i=1,2,3,4,$$

其中 $\theta_1=\partial_{1,0},\theta_2=\partial_{0,2},\theta_3=\partial_{1,1},\theta_4=\partial_{2,0}$. 通过计算, 有

$$\mathrm{Prem}(D_i,\mathbb{C}_1)=\mathrm{Prem}(D_i,\mathbb{C}_2)=0,\quad i=1,2,3,4.$$

根据推论 1, $\mathrm{WR}(n_1,n_2,n_1y-n_2x)=0$. 同理, 得到 $\mathrm{WR}(n_1,n_3,n_1z-n_3x)=0$ 和 $\mathrm{WR}(n_2,n_3,n_2z-n_3y)=0$. 所以例子中的论断成立.

例 3 证明如果正则曲面是球面, 则存在非零常数 c, 使得 $(E,F,G)=c(L,M,N)$, 其中 E,F,G 和 L,M,N 分别由 (3) 和 (4) 式定义.

利用例 2 中的记号, 有升列 $\mathbb{C}_1$ 和 $\mathbb{C}_2$. 因为 $\mathrm{Prem}(E,\mathbb{C}_1)\neq 0$ 以及

$$\mathrm{Prem}(EL_{1,0}-E_{1,0}L,\mathbb{C}_1)=\mathrm{Prem}(EL_{1,0}-E_{1,0}L,\mathbb{C}_2)=0,$$

$$\mathrm{Prem}(EL_{0,1}-E_{0,1}L,\mathbb{C}_1)=\mathrm{Prem}(EL_{0,1}-E_{0,1}L,\mathbb{C}_2)=0,$$

E 和 L 在常数域 $\mathbb{R}$ 上线性相关, 即存在非零常数 c, 使得 $E=cL$. 又因为

$$\mathrm{Prem}(F,\mathbb{C}_1)\neq 0,\quad \mathrm{Prem}(EM-LF,\mathbb{C}_1)=\mathrm{Prem}(EM-LF,\mathbb{C}_2)=0,$$

$$\mathrm{Prem}(G,\mathbb{C}_1)\neq 0,\quad \mathrm{Prem}(EN-GL,\mathbb{C}_1)=\mathrm{Prem}(EN-GL,\mathbb{C}_2)=0,$$

所以 (E,F,G) 和 (L,M,N) 两向量平行, 从而 $(E,F,G)=c(L,M,N)$.

例 4 证明当曲面在空间 $\mathbb{R}^3$ 中做刚体运动时, 它的第 1 基本形式不变.

令 $(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant 3,1\leqslant j\leqslant 3}$ 为刚体运动中表示旋转的矩阵, $(b_1,b_2,b_3)^{\mathrm{T}}$ 表示平移. 令 (e_i,f_i,g_i) 表示相应曲面 (x_i,y_i,z_i) 的第 1 基本形式, 这里 $i=1,2$. 由第 4.1 节中的定义方程, 我们有如下的假设条件集 $\mathbb{H}$:

$$H_1=x_1-b_1-a_{1,1}x_2-a_{1,2}y_2-a_{1,3}z_2;$$

$$H_2=y_1-b_2-a_{2,1}x_2-a_{2,2}y_2-a_{2,3}z_2;$$

$$H_3=z_1-b_3-a_{3,1}x_2-a_{3,2}y_2-a_{3,3}z_2;$$

$$H_4=a_{1,1}^2+a_{2,1}^2+a_{3,1}^2-1;$$

$$H_5=a_{1,2}^2+a_{2,2}^2+a_{3,2}^2-1;$$

$$H_6=a_{1,3}^2+a_{2,3}^2+a_{3,3}^2-1;$$

$$H_7=a_{1,1}a_{1,2}+a_{2,1}a_{2,2}+a_{3,1}a_{3,2};$$

$$H_8=a_{1,1}a_{1,3}+a_{2,1}a_{2,3}+a_{3,1}a_{3,3};$$

$$H_9=a_{1,2}a_{1,3}+a_{2,2}a_{2,3}+a_{3,2}a_{3,3};$$

$$H_{10}=e_1-x_{11,0}^2-y_{11,0}^2-z_{11,0}^2;$$

$$H_{11}=e_2-x_{21,0}^2-y_{21,0}^2-z_{21,0}^2;$$

$$H_{12}=f_1-x_{11,0}x_{10,1}-y_{11,0}y_{10,1}-z_{11,0}z_{10,1};$$

$$H_{13}=f_2-x_{21,0}x_{20,1}-y_{21,0}y_{20,1}-z_{21,0}z_{20,1};$$

$$H_{14} = g_1 - x1_{0,1}^2 - y1_{0,1}^2 - z1_{0,1}^2;$$
$$H_{15} = g_2 - x2_{0,1}^2 - y2_{0,1}^2 - z2_{0,1}^2.$$

因为 $a_{i,j}$ 是常数, 其中 $i,j=1,2,3$, 所以方程 $H_{i,j}=a_{i,j\,1,0}$ 和 $G_{i,j}=a_{i,j\,0,1}$ 也需要包含在 $\mathbb{H}$ 中, 结论集为 $\mathbb{S}=\{-e_2+e_1, f_2-f_1, g_1-g_2\}$. 令

$$e_1 > e_2 > g_1 > g_2 > f_1 > f_2 > z_1 > y_1 > x_1 > z_2 > y_2 > x_2 > a_{1,1} > a_{1,2} > \cdots > a_{3,3}$$

沿用注 1 中的序关系, 视 b_1, b_2, b_3 为参数. 得到

$$\mathrm{Zero}(\mathbb{H}) = \prod_{i=1}^{10} \mathrm{Zero}(\mathbb{C}_i/\mathrm{IS}_i),$$

其中 $\mathbb{C}_i$ 为升列, IS_i 为 $\mathbb{C}_i$ 的首系和隔离子的乘积. 每个升列包含大约 20 个微分多项式. 因为 $\mathrm{Prem}(\mathbb{S},\mathbb{C}_i)=0$, $i=1,2,\ldots,10$, 所以结论是正确的.

致谢 作者衷心感谢论文评审人对本文提出的宝贵的修改意见.

参考文献

1 Gelernter H, Hanson J H, Loveland D W. Empirical explorations of the geometry-theory proving machine. In: Proc Western Joint Computer Conference, San Francisco, 1960, 143–147

2 Wu W T. On the foundation of algebraic differential geometry. *Syst Sci Math Sci*, **2**: 290–312 (1989)

3 Wu W T. Mechanical proving of differential geometry and some of its application in mechanics. *J Automat Reason*, **7**: 171–192 (1991)

4 Wu W T. On algebrico-differential equations solving. *J Syst Sci Complexity*, **17**: 1–13 (2004)

5 Adams W W, Loustaunau P. An Introduction to Gröbner Bases. Providence, RI: Amer Math Soc, 1994

6 Chou S C. Mechanical Geometry Theorem Proving. Boston: D Reidel Publishing Company, 1988

7 Chou S C, Gao X S. Automated reasoning in differential geometry and mechanics using the characteristic set method, I. an improved version of Ritt-Wu's decomposition algorithm. *J Automat Reason*, **10**: 161–172 (1993)

8 Chou S C, Gao X S. Automated reasoning in differential geometry and mechanics using the characteristic set method, II. mechanical theorem proving. *J Automat Reason*, **10**: 173–189 (1993)

9 Chou S C, Gao X S. Automated reasoning in differential geometry and mechanics using the characteristic set method, III. Mechanical Formula Derivation. In: Shi Z ed. Proceedings of the IFIP International Workshop on Automated Reasoning. North-Holland: Elsevier Science Publishers B V, 1992: 1–11

10 Chou S C, Gao X S. Automated reasoning in differential geometry and mechanics using the characteristic set method, IV. Bertrand curves. *Syst Sci Math Sci*, **6**: 186–192 (1993)

11 Cao L N, Li H. Algorithm and implementation of mechanical proving of a class of theorems in elementary differential geometry (in Chinese). *J Syst Sci Math Sci*, **26**: 395–401 (2006)

12 Li Z. Mechanical theorem proving in the local theory of surfaces. *Ann Math Art Int*, **13**: 25–46 (1995)

13 Li H. Mechanical theorem proving in differential geometry. *Sci China Ser A-Math*, **40**: 350–356 (1997)

14 Ferro G C, Gallo G. A procedure to prove statements in differential geometry. *J Automat Reason*, **6**: 203–209 (1990)

15 Kolchin E R. Differential Algebra and Algebraic Groups. New York-London: Academic Press, 1973

16 Ritt J F. Differential Algebra. New York: Amer Math Soc, 1950

17 Evelyne H. Factorization-free decomposition algorithms in differential algebra. *J Symb Comput*, **29**: 641–662 (2000)